2023／9／23・24

【輝玉祭・数研】

数研部誌①

攻玉社学園数学研究愛好会作成　2023 年度

輝玉祭で数研にお越しいただいた方，この部誌を開いてくれた方、誠にありがとうございます。この数研部誌では、個人の研究についてまとめていたり、受験で使える知識・テクニックなどについて解説していたり、作った問題を載せていたりするので、最後まで読んでみてくれると嬉しいです。ではよろしくお願いします。

数学研究愛好会一同

目次

P1…目次

P2～3…挨拶(23R 松岡　柚翔)

P4～17…算数・数学の問題を通してのおもしろさ(11R 今岡　航己)

P18～20…【参考】分数の加減乗除～使える技～

P20～22…4 つの正多面体(16R 曽根　慎司)

P23～28…個人作問編①(13R 八木　悠太)

P29～42…個人作問編②(23R 松岡　柚翔)

P43…編集後記(23R 松岡　柚翔)

挨拶

輝玉祭で数研のブースにお越しいただいた方、この部誌を開いている皆様、ありがとうございます。今回、数研部誌編集を担当しました中2の松岡と申します。今年は何か新たなことをやりたいと思い、この「数研部誌」を制作しました。ところで、前ページの目次を見て、こう思った人はいないでしょうか。「ん？書いている人少なくない？」と。そうです、少ないんです。**4人しか書いていませんね**(「使える技」、は4人のうちの誰かが制作しました)。これは部誌担当で4人いる、というわけではなく、単に部員が少ないのです‼(幽霊部員除く)
普段部活に来る生徒はなんと中1×3人,中2×2人,高2×1(部長)　計6人。※部長は数独などを編集しています。とはいっても元々は部員数結構いたらしいです。来てない人が多いんですね。ということで、この文章を読んでいるそこのあなた!(高1以下)この学校に来たら／いたら **数研に入部しましょう！楽しく数学をやっています！**…これはさておき、この部誌の説明をします。(簡単に)
部誌今回初の試みです多分。作ろうかと思っていたものの部員で全然共有していなかったため、始めたのは7月の期末試験終了後となってしまったのです。そして、夏休み中活動した8／21に事件発生。部長によると、1枚印刷するのに5円かかり(紙代)、600部印刷する計算で、部誌を印刷すると予想入試問題と合わせて15万円はかかってしまうことが判明。使える予算はそれほど多くないうえ、部員数が少ないため各自で負担するとかなりの額になってしまう。そこで、HPに載せてもらうことになりました(^^)部長が動いたくれたおかげです。ありがとうございます。というわけで準備日9／22まで余裕が生まれた。ﾌｩ…誤算だった。結構時間がかかります…。→この挨拶を書いているのは9／20の夜です。ガンバリマス。次に僕と中1が書いた論文内容についてです。普段研究しているもの、とかではなくわりと漠然とお願いしたので、どのようになるかと思いましたが読み応えのある

ので感動です。特に中１今岡君は文章形式で分かりやすく書いており、内容もためになるもの(拍手)だったので very good です。今岡君が書いてくれた論文に関して、**僕が追加で沢山付け足しましたので、かなり分量としては多くなっています**。受験にも役立つと思うので、ぜひ読んでみてください。**数研部員２人分の論文**ですよ！次に中１八木君です。彼のは良い意味で困ります。良い意味ですからね。というのも、彼は僕に問題をどんどん送ってくれるのですが、**良問ばかり**。それと同時に**難問ばかり**。面白い問題で楽しいのですが、**解答が…作れない(泣)**。でも本当に良問ばかりで楽しいです。沢山の学びをありがとうございます。次に中１曽根君です。分かりにくいと思うかもしれませんが、**数学の知識(作図だけど)を使って身近の事を解決する、という素晴らしい**ものになっています。かなり良い内容です。皆さんもぜひ解いてみてください。最後に自分(中２松岡)についてです。問題に関しては受験終了後に僕が作った問題なども入れています。また、夏休み中**ふと思いついた素晴らしい(自称)問題もある**のでぜひ解いてみてください。時間があればもっと色々なことを書きたかったのですが、時間の少なさにより書きませんでした。今年は企画するのも遅く、うまくできなかったので、来年以降は(さすがに)良いものを作りたいと思っています。来年もお会いしましょう。※先述したように中１八木君の問題は非常に難しくできており、こちらとしても確認する時間がないので、あえて答えは載せず(載せているものもあります)、皆さんも挑戦してみてもらえると嬉しいです！来年も今年と同じ場所に部誌を載せる可能性が高い?ので来年も同じ場所でお会いしましょう！(来年答えを掲載予定)
また、間違え・抜け等があるかもしれませんが、ご了承ください。温かい目で見てもらえると嬉しいです。輝玉祭中に気づいた場合、ぜひ数研部員に教えてください。今後の反省材料として利用します。
というわけでよろしくお願いします。

中２(23R)松岡　柚翔

算数・数学の問題を通してのおもしろさ

中1(11R)今岡　航己

前書き

この度は数研部誌をご覧いただきありがとうございます。僕が書かせていただいた内容(テーマ)は主に、
「*2024 を使った問題について*」,「*断頭三角柱について*」の 2 点です。この 2 点は自分が去年受験していたときに特におもしろいと感じたものです。この僕が書かせていただいたことをみなさんに読んでいただき、算数・数学が少しでもおもしろいと感じてもらうことができれば幸いです。どうか最後まで楽しくご覧いただければ、僕はとてもうれしいです。よろしくおねがいいたします。

2024 を使った問題について(素因数分解や約数について)

① 基本知識

突然ですが 2024 の素因数分解した形をみなさんはご存じですか。2024 を素因数分解すると、**2024＝2×2×2×11×23**　という形になります。この素因数分解の形はぜひ知っておくとよいと思います。

② 問題にチャレンジ

$\boxed{\text{Level1Ⓐ}}$

2024 に何をかけると平方数になるでしょう？最小の数を求めてください。※平方数…同じ整数を２回かけてできる数

$\boxed{\text{Level1Ⓑ}}$

2024 の約数の個数は何個でしょう？

$\boxed{\text{Level}Ⓒ}$

(1) 32 の約数のすべての逆数の和は何でしょう？

(2) ある整数(0 以上)の約数をすべてたすと 4320 で、そのある整数の

約数のすべての逆数の和は$\frac{540}{253}$です。ある整数は何ですか。

逆数…かけて 1 になる。例えば$\frac{2}{3}$の逆数は$\frac{3}{2}$。$1\frac{2}{5}$の逆数は$\frac{5}{7}$。分母 分子だけを入れ替えて$1\frac{5}{2}=3\frac{1}{2}$とするのは NG です。P18 でも述べていますが、分数の掛け算は仮分数に直すこと。$1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$として、分母 分子を入れ替え。

(考えてみよう!)

③ 解説

$\boxed{\text{Level}Ⓐ}$

2024 を素因数分解すると、2024＝2×2×2×11×23　となる。平方数とは$a \times a$の形の数だと考えると、2024＝2×2×2×11×23 より共通している数の組は 2×2 の 2 と 2 だと分かり、残りの共通している数がない 2, 11, 23 を共通している数の組にさせるために 2 と 11 と 23 をかけると、2 と 2, 11 と 11, 23 と 23 という共通している数の組が(新たに)すべてできるので 2×11×23＝**答え　506**　だと分かる。

$\boxed{\text{Level}Ⓑ}$

2024 を素因数分解すると、2024＝2×2×2×11×23＝$2^3 \times 11 \times 23$＝$2^3 \times 11^1 \times 23^1$　と分かり、コラム(P9～)を参考にすると、

(3＋1)×(1＋1)×(1＋1)＝16 になると分かる。

したがって約数の個数は**答え　16 個**　と分かる。

$\boxed{\text{Level}Ⓒ}$

(1)

$\boxed{\text{総和}}$ 1＋2＋4＋8＋16＋32＝63

32 の約数→1, 2, 4, 8, 16, 32

約数の逆数→$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

通分する→$\frac{32}{32}, \frac{16}{32}, \frac{8}{32}, \frac{4}{32}, \frac{2}{32}, \frac{1}{32}$

したがって 32 の約数のすべての逆数の和は

$\frac{\boxed{32}}{32}+\frac{\boxed{16}}{32}+\frac{\boxed{8}}{32}+\frac{\boxed{4}}{32}+\frac{\boxed{2}}{32}+\frac{\boxed{1}}{32}$　となり、分子が$\boxed{\text{32 の約数の和}}$ということが分かる(実はこれが(2)を考えるヒントとなる…)ので、$\frac{63}{32}$となり、

答え　$1\frac{31}{32}(\frac{63}{32})$　となる。

(2) ある整数を A とする。

$\boxed{\text{総和}}$ 4320

A の約数→$\boxed{1, \cdots, \mathrm{A}}$

約数の逆数→$1, \cdots, \frac{1}{\mathrm{A}}$　(1)などから**同じ**だと分かる

通分する→$\boxed{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}}, \cdots \frac{1}{\mathrm{A}}}$

$\boxed{\text{総和}}$ $\frac{540}{253}$

したがって $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}}+\cdots\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{4320}{\mathrm{A}}$　となり、$\frac{4320}{\mathrm{A}}=\frac{540}{253}$　という式ができ、A＝2024 だと分かる。よって**答え　2024**　になる。

（補足）

$\boxed{\text{LevelⒶ}}$　2024＝2×2×2×11×23 で、これに(2×11×23)をかけると、2×2×2×2×11×11×23×23＝$\underbrace{(2\times2\times11\times23)}_{a}\times\underbrace{(2\times2\times11\times23)}_{a}$　となり、$a\times a$の形、すなわち平方数になります。

$\boxed{\text{Point}}$平方数になるためにかける数を求める問題 ↳まず素因数分解し、同じ数が偶数回出てくるように、数をかける‼

ちなみに、本問では「**最小**の数」を求めましたが、条件を満たす「**2 番目に小さい**数」はいくつでしょうか？上の $\boxed{\text{Point}}$ より、最小の数 506 にさらに素因数を偶数回かければよいので、506×(2×2)×(11×11)×(23×23)＝129554216 となります。非常に大きくなりましたね…。「3 番目に小さい数」は今求めた　129554216×(2×2)×(11×11)×(23×23)です。電卓で求めるとエラーになりますが、実際に計算してみると 33170543247776(間違えているかも)となります…。だから、この手の問題が今年の入試に出ることがあるならば、最小の数 506 のみが出されるはずです。きっと。

$\boxed{\text{Level1Ⓑ}}$

P16 のコラムから、約数の個数を計算で求めるためには数の右上にのった小さい数(指数という)を明らかにさせる必要があります。

「2^3×11×23」　では、11 と 23 の指数が分かりません。だから、

「$2^3 \times 11^1 \times 23^1$」と言い換えることで 11 と 23 の指数が分かります。

11^1は 11 を 1 回かけた数、すなわち 11 です。

$\boxed{\text{Level1Ⓒ}}$

このような問題は、いろいろな学校で出る可能性があるので、考え方を理解しておきましょう。ちなみに、本問から、

$\boxed{\text{公式(?)}}$(ある数 A の約数の逆数の和)$=\dfrac{(\text{A の約数の和})}{\text{A}}$

が分かります。

また、(2)で$\dfrac{4320}{\text{A}}=\dfrac{540}{253}$、すなわち A=2024 という計算がありました。

それは、$\dfrac{4320}{\text{A}}=\dfrac{540}{253}$ 　→253×8=2024、という計算をしています。

×8

×8

コラム(約数の個数・総和の求め方)

このコラムでは、ある自然数の約数の個数・総和の求め方となぜそのような求め方ができるのかについて紹介します。※0 より大きい約数について考えます。

※以下では、aをn回かけた数を　a^n　と表します。
したがって、x^a, y^b, z^cはそれぞれx, y, zをa, b, c回かけたものです。

「自然数$n=x^a \times y^b \times z^c \cdots$」の場合　　※自然数→1, 2, 3, …

⇩

約数の個数
$=(\boldsymbol{a}+\mathbf{1})\times(\boldsymbol{b}+\mathbf{1})\times(\boldsymbol{c}+\mathbf{1})\times\cdots$

約数の総和
$=(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\cdots\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}})\times(\mathbf{1}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{1}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}+\cdots\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{b}})\times(\mathbf{1}+\boldsymbol{z}^{\mathbf{1}}+\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}+\cdots\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{c}})\times\cdots$
※例えばx^1はxを 1 回かけた数なので、xに等しい

なぜこのような求め方をするのか

約数の個数

例えば自然数 360 を考えてみると、

$360=2^3\times3^2\times5$
素因数分解

約数は、この 2, 3, 5 の指数をそれぞれ決めると 1 つに決まることが考えられます。

※指数…a^nのときの、nの部分(何回かけるか表した部分)

例)2 の指数が 1、3 の指数が 2、5 の指数が 0(つまり 5 をかけない)→18
したがって、

$$\begin{cases} 2 \text{ の指数} \rightarrow 4 \text{ 通り}(2^0, 2^1, 2^2, 2^3) \\ 3 \text{ の指数} \rightarrow 3 \text{ 通り}(3^0, 3^1, 3^2) \\ 5 \text{ の指数} \rightarrow 2 \text{ 通り}(5^0, 5^1) \end{cases}$$

※どんな数でも、0 乗すると、1 になる

になるので、4×3×2=24(通り)になります。よって、約数の個数は上のように求められることが分かります。

(補足)例えば 72(＝$2^3\times3^2$)ならば、**約数**は、下のようになります。

×	2^0	2^1	2^2	2^3
3^0	1	2	4	8
3^1	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72

つまり、約数は、(3＋1)×(2＋1)＝4×3 の表中にある数字の数 12 に等しい。

そして、360(＝$2^3\times3^2\times5$)のように素因数を 3 つもつ数の約数ならば、直方体を考えればよいことになります。360 ならば、4×3×2 の直方体です。

約数の個数

例えば自然数 18 を考えてみると、

$18=\underbrace{2\times3^2}_{\text{素因数分解}}$　より、18 のすべての約数を　素因数 2, 3 を使って表すことができます(例えば 9＝$2^0\times3^2$のようにして表せます)。

$18=2^1\times3^2$
$9=2^0\times3^2$
$6=2^1\times3^1$
$3=2^0\times3^1$
$2=2^1\times3^0$
$1=2^0\times3^0$

すると、約数の総和は、

$$2^1\times3^2+2^0\times3^2+2^1\times3^1+2^0\times3^1+2^1\times3^0+2^0\times3^0$$

$2^0\times$● ＋ $2^1\times$■ で分けた

$$=(2^0\times3^2+2^0\times3^1+2^0\times3^0)+(2^1\times3^2+2^1\times3^1+2^1\times3^0)$$

$$=2^0\times(3^2+3^1+3^0)+2^1\times(3^2+3^1+3^0)$$

分配法則

$$=(2^0+2^1)\times(3^2+3^1+3^0)$$

$$=(2^0+2^1)\times(3^0+3^1+3^2)$$

よって、約数の総和は上のように求められることが分かります。

クイズ　下の数の約数の個数、総和をそれぞれ求めてみてください。

(1) 45　(2) 289　(3) 384

※解答と解説は次ページ

$\boxed{\text{解答}}$　(1) 45＝$3^2\times5$　(2) 289＝17^2　(3) 384＝$2^7\times3$　より、

	約数の個数	約数の総和
(1) 45	6 個	78
(2) 289	3 個	307
(3) 384	16 個	1020

$\boxed{\text{解説}}$

まず約数の個数について。(1) は(2＋1)×(1＋1)＝6、
(3) は(7＋1)×(1＋1)＝16。
次に約数の総和について。(1) は(1＋3^1＋3^2)×(1＋5^1)＝78、
(3) は(1＋2^1＋2^2＋2^3＋2^4＋2^5＋2^6＋2^7)×(1＋3^1)＝1020。
ここまでは知っていれば簡単ですね。ですが、(2) のような平方数($a\times a$の形) の数はどうすればよいのでしょう。平方数でも、144＝12^2などの数は、144＝12^2＝2^4×3^2となり、これならば公式に簡単に当てはめられます。では(2) は何が悩む原因なのでしょう。それは
289＝17^2＝(素数)^{2}だからです。まず 289 の約数の個数は(2＋1)＝3、それだけです。次に 289 の約数の総和は、…。実はこれは
1＋17＋289＝307, としかできません。公式にあてはめてみると、
(1＋17＋289) となります。よって、(素数)^{2}の約数の総和は、実際に書き出して足し算します。
※素数… 1 とその数自身以外に約数をもたない数。1 は素数でないことに注意。―解説図―

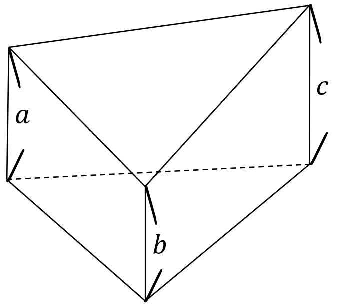
約数の個数・総和の公式は覚えておくとよいです。もし分からなかったら書き出してたすのがよいと思います。公式を試した後に、検算として書き出してたしてみる、というのも 1 つの手かも。

次ページから、「断頭三角柱について」

断頭三角柱について

① 基本知識

みなさんは「断頭三角柱とは何か」知っていますか。断頭三角柱とは、下の図のように切断された三角柱のことをいいます。



では断頭三角柱の体積はどうやって求めるかみなさんは知っていますか。断頭三角柱の体積は下のように求めます。体積…V, 底面積…S。

$$\mathbf{V = S \times \frac{a+b+c}{3}}$$

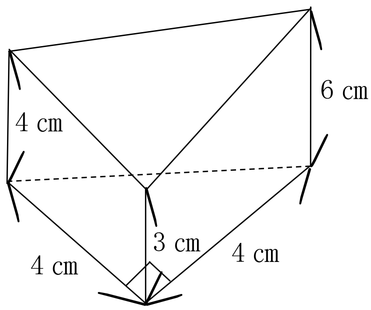
→つまり、底面積 ×高さの平均 ‼

注意点…3 つの**高さの直線がすべて平行、底面と高さが垂直**に交わる

② 問題にチャレンジ **※<u>図は正確とは限りません</u>**

Level Ⓐ

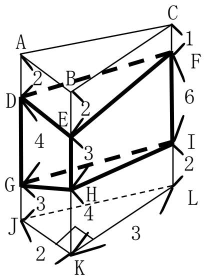
三角柱を 1 つの平面で切断した、下のような立体の体積は何cm^3でしょう？



Level Ⓑ

三角柱ABC—JKLを下のようにある三角柱を2つの平面で切断したときの太線で囲まれた立体(三角柱DEK—GHI)の体積は何cm^3でしょう？

【編集者注：見づらくて申し訳ございません…】



(単位はすべてcm)

Level Ⓒ

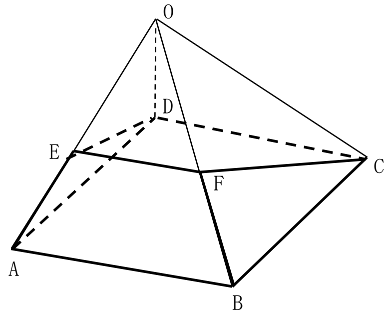
下の立体は、底面が正方形で、4つの側面がすべて正三角形の四角すいで、

OE：EA＝3：2

OF：FB＝3：2　　である。

この四角すいを平面CDEFで切断したときの下側の立体の体積はもとの四角すいの体積の何倍ですか？

ただし、角すいの体積は　(底面積)×(高さ)×$\frac{1}{3}$　で求められる。



(考えてみよう!)

③ 解説

Level Ⓐ

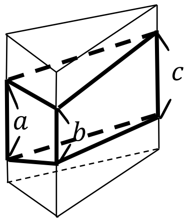
基本知識で紹介した断頭三角柱の求め方を使うと、$\mathbf{V = S \times \frac{a+b+c}{3}}$ から、$\underbrace{4 \times 4 \times \frac{1}{2}}_{\text{↳底面積}} \times \underbrace{\frac{4+3+6}{3}}_{\text{↳高さ平均}}$ となり、計算すると$\frac{104}{3}$となる。

よって**答え** $\mathbf{\frac{104}{3}cm^3}$ になる。

Level Ⓑ

全体の体積から上と下の断頭三角柱の体積を引いて答えを求めることもできるが、次のような考え方を使う求め方もあり、ラクに解ける。

「浮いている」断頭三角柱の体積の求め方



$V = S \times \frac{a+b+c}{3}$

↳a, b, cの**各辺が底面に対して垂直**ならば、浮いていても成り立つ

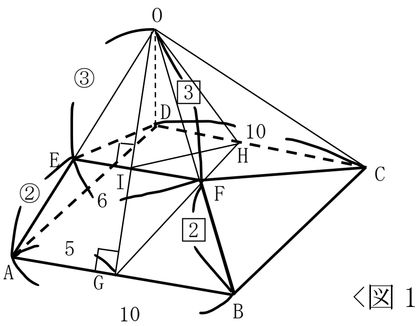
※このSは、**全体の三角柱の**底面の面積

この考え方を使うと、太線で囲まれた立体の体積は、

$\underbrace{2 \times 3 \times \frac{1}{2}}_{\text{↳底面積}} \times \underbrace{\frac{4+3+6}{3}}_{\text{↳高さ平均}} = 13$。よって**答え** **13cm³** と分かる。

Level1Ⓒ　**※「△」は、「三角形」**の意味

ABとDCの中点(真ん中の点)をそれぞれG,Hとし、O・G・Hを通る面を切断したときのOGとEFの交点をIとする。

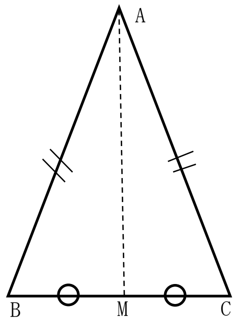


<図1>

△OAB,△OCDはどちらも正三角形と問題文から分かり、下のPoint①から、OGとAB,OHとDCは垂直に交わると分かる。また、下のPoint②から、ABとEFは平行だと分かる。OGとABが垂直であることと、ABとEFが平行であることから、OIとEFも垂直だと分かる。

※これは、断頭三角柱の公式は底面と各辺が垂直である必要があるため、垂直であることを考えている

Point①二等辺三角形ABCにおいて…

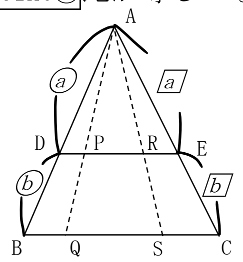


二等辺三角形ABCにおいて、BCの中点Mを設ける

⇨**AMとBCは垂直‼**

▸正三角形も、二等辺三角形だから、これが成立

Point② 比が等しいならば…

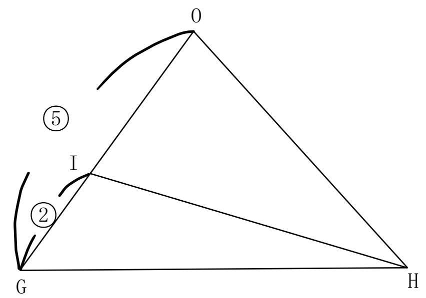


AD：DB＝AE：EC ならば、**DE と BC は平行**
また、 AD：AB＝AE：AC＝DE：BC
このとき、**AP：PQ や AR：RS なども AD：DB／AE：EC**
に等しい‼

AB＝10 cm　とする。AB と EF は平行で、OE：EA＝3：2→OE：OA＝3：5。

よって、EF＝AB×$\frac{3}{5}$＝6 cm。

そして、△OGH を切りとって、底面積の比(△GIH：△GOH)を考える。



IG：OG＝EA：OA＝2：5　(上の、Point② を参照)
より、(△GIH の面積)：(△GOH の面積)＝2：5　となる。
さらに、
<図 1>の太線で囲まれた部分(面 EFCD の下側)の、高さの平均

→(10＋10＋6)÷3＝$\frac{26}{3}$(cm)

<図 1>の立体全体(四角すい O―ABCD)の、高さの平均

→(10＋10＋0)÷3＝$\frac{20}{3}$(cm)

ここで、
<図1>の立体全体は、△OGHを底面と見たときに、この平面とAB,EF,DCが垂直であることから、**△OGH×高さ平均$\frac{20}{3}$**　で体積が求まる。

同様に、<図 1>の下側の立体は、△IGH を底面と見たときに、この平面とAB,EF,DC が垂直であることから、**△IGH×高さ平均$\frac{26}{3}$**　で体積が求まる。

よって、(立体全体の体積)：(下側の立体の体積)は、
底面積の比(△OGH：△IGH)と高さ平均の比($\frac{20}{3}$：$\frac{26}{3}$)の積になるので、

(立体全体)：(下側)＝(△OGH×$\frac{20}{3}$)：(△IGH×$\frac{26}{3}$)＝(5×$\frac{20}{3}$)：(2×$\frac{26}{3}$)

＝$\frac{100}{3}$：$\frac{52}{3}$＝100：52＝25：13。求めるのは、(下側)は(全体)の何倍か、

つまり 13＝25×(？)となり、**答え　$\frac{13}{25}$倍**　になる。

最後に

僕が書いた数研部誌をご覧いただきありがとうございました。僕が数研部誌を通して伝えたいことは「算数・数学の楽しみ方」です。算数・数学にはいろいろな楽しみ方があると僕は思います。例えば問題を通して新たなことを学んだり難しい問題を解いたりする楽しみ方があると僕は思います。ぜひみなさんも自分にあった楽しみ方を見つけて算数・数学をもっと好きになってください。

【参考】分数の加減乗除

使える技

突然ですが問題です。$\frac{2}{3}$＋$\frac{7}{5}$はいくつでしょう。通分をすることで

$\frac{10}{15}$＋$\frac{21}{15}$＝$\frac{31}{15}$【＝2$\frac{1}{15}$】と求められます。

$\frac{b}{a}$＋$\frac{d}{c}$の分母を$a \times c$で通分すると、$\frac{b \times c + a \times d}{a \times c}$ですね。つまり、分母はまず、互いの分母をかけます。分子は、対角線上に掛け算をすれば良いのです。下のような感じです（分子の“対角線上掛け算”を表しています)。

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{b \times c + a \times d}{a \times c}$$

このように計算すれば、分数の足し算がやりやすくなるのではないでしょうか。例えば、$\frac{1}{3}$＋$\frac{1}{2}$　を計算するとき、通分して$\frac{2}{6}$＋$\frac{3}{6}$＝$\frac{5}{6}$とやる場合、分子を 2,3 と求めた後に 2＋3＝5、とやる必要があります。しかし、上で述べた方法を使えば、暗算で分母：3×2＝6, 分子：2＋3＝5

よって、$\frac{5}{6}$ 。のようにすぐ計算できます。みなさん、ぜひ使ってみてください。このやりかたが難しいと思われる方は、普通に通分してミスしないようにするのがよいと思います。自分に合った方法でやってみてください。

次に、引き算について考えます。が、これは足し算のときと同じです。

例えば、$\frac{7}{5}$－$\frac{2}{3}$　は？→$\frac{11}{15}$ですね。これも、分母：5×3＝15,

分子：7×3－2×5＝11、としたら、ラクに解けませんか？理屈は足し算のときとまったく同じです。

次に掛け算です。掛け算はあまり「技」はないですね…。重要なことは２つ、

$\boxed{\text{Point}}$分数の掛け算
① **<u>約分をして、計算を簡略化‼</u>**
② **<u>帯分数は仮分数に直して計算‼</u>**　　　です。

次に割り算です。ここでは結構便利な方法を紹介します。まず、$\frac{9}{14}\div\frac{6}{7}$ を計算してみてください。答えは、$\frac{3}{4}$ ですよね。$\frac{9}{14}\times\frac{7}{6}=\frac{3}{4}$、とやっても全然よいですが、実は $\frac{9\div6}{14\div7}=\frac{1.5}{2}=\frac{3}{4}$ として求まります。つまり、分母同士、分子同士で割り算すれば OK‼　これを証明します。

(証明)

「$\frac{y}{x}\div\frac{w}{z}$」という計算を考える。割られる数, 割る数ともに同じ数をかけても、割り算の結果は変わらないので、

$$\frac{y}{x}\div\frac{w}{z}=\left(\frac{y}{x}\times\frac{z}{w}\right)\div\left(\frac{w}{z}\times\frac{z}{w}\right)=\frac{y\times z}{x\times w}\div1=\frac{y\times z}{x\times w}\cdots①$$　※逆数をかけた

ここで、分母同士, 分子同士を、それぞれ割り算してできる分数を考える。これは、

$$\frac{y\div w}{x\div z}=\frac{\frac{y}{w}}{\frac{x}{z}}$$

分数全体に$(z\times w)$をかけて、

$$\frac{\frac{y}{\cancel{w}}\times z\times\cancel{w}}{\frac{x}{\cancel{z}}\times\cancel{z}\times w}=\frac{y\times z}{x\times w}\cdots②$$

①②より、

$$\frac{y}{x}\div\frac{w}{z}=\frac{y\div w}{x\div z}$$　　(証明終)

※数学が好きだったりして、上の証明方法が好ましくないと思われた方がいるかもしれません。それならば、①の分数全体を、$(z\times w)$で割れば解決ですね！

ちなみに、上の証明で、割り算は、割る側の分数をひっくり返して掛け算すること(即ち逆数をかけること)も証明できましたね。①の部分です。
でも、今紹介した分母同士,分子同士を割り算する方法は、分母同士,分子同士がある程度大きい公約数を持つ場合にはかなり有効ですが、そうでなければ使いづらいかもしれません…。自分に合った方法でやるのが一番♪です。
(補足)
分数の足し算/引き算について。3 と 5 ならば互いに素(公約数【共通する約数】が 1 以外ないこと)なので、分母は 3×5 でそろえられますが、例えば 6 と 8 ならば、公約数として 1 以外に 2 をもち、最小公倍数は 6×8 にはなりませんよね(24)。ここで先程紹介した“分子の対角線上掛け算”をする方法を使うのならば、一旦、分母を 6×8 にそろえて、最後約分するのがよいでしょう。でも、慣れないとやりづらいかもしれませんので、そこは、自分に合った方法を使いましょう‼

※3 と 5 の最小公倍数は 3×5 に等しくなります。最小公倍数は、「共通な倍数」のこと。3×●＝5×■となる最小は、●＝5、■＝3 とすれば良いです。よって、3×5 に等しい。
→互いに素な 2 数ならば、最小公倍数は 2 数の積に等しくなります。

ここまで、ありがとうございました。計算ミスなどをしないよう、計算の練習は大切にしましょう‼自分に合った方法を見つけてみましょう‼(4 回目)

4 つの正多面体

中 1(16R)曽根　慎司

あなたはある古びた屋敷に閉じ込められていました。入口から右に60°くらい動くと、左に赤,右に黄色が見えました。そのちょうど後ろに扉があり、入るとそこは廊下になっており、天井から 15 個のランタンがありました。その近くには定規が置いてあり、ランタンとランタンの間隔を調べると 23 ㎝でした。その奥にはまた扉があり、入ると台の上に正八面体が堂々とあり、その台には「正四面体の底面の中心に出口はある」と書いてある、正四面体を見つけられればこの屋敷から外に出られるというわけだ。その後正四面体がある部屋にもぐり、今度は 120°右に行き、扉に入るとまたもや 15 個のランタンがあり、その間隔も 23 ㎝、その奥には正十二面体がありました。入ってきた隣には梯子(はしご)があり、上に上ると斜めに道が続いており、その板は体感で 60°はありました。またもや天井にランタンがあり、間隔は 23 ㎝。登っていくと丸い空間に出て、真ん中には正六角形がありました。その近くには地面に穴が開いており、覗くと入口の丸いホールが見えました。仕方なく戻り、最後の扉の中に入りました。また、23 ㎝間隔の 15 個のランタンの後にあったのは正二十面体でした。この屋敷には正四面体はなかったのです。

問題

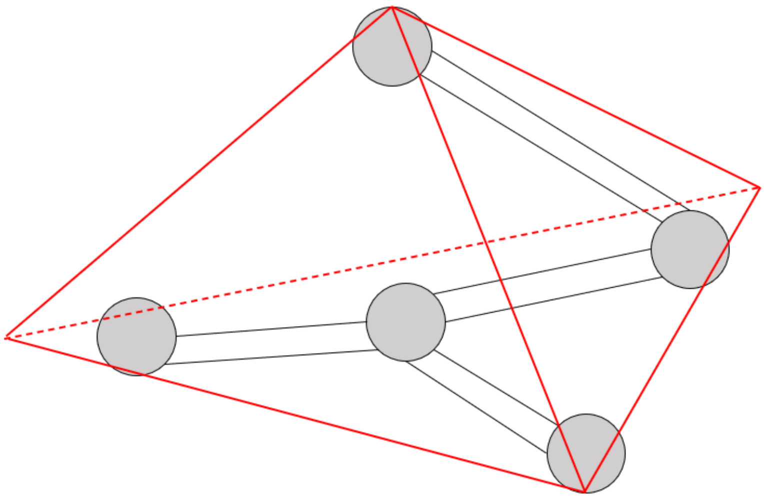
この屋敷には本当に正四面体がなかったのか、正四面体はあるのかを考えてみてください。隠し部屋,秘密の通路などはありません。

ヒント

この問題に大事なのは作図力です。近くの紙にこの建物の構造を書いてみてください。

$\boxed{\text{解答}}$

この問題は作図がテーマです。実際に作図をしてみると...下図のようになります(少しずれていますが、ご了承ください)。
この丸(ランタン)を下図のように結ぶと…この屋敷自体が正四面体だったということです。最初の所から下にほると、脱出路が表れます。



個人作問編①

中1(13R)八木　悠太

$\boxed{\text{問題❶}}$**～八木君が入試予想問題として出そうとしてた**約束記号(笑)～
$(x-y+z)\div z=z$　のとき、$x-y-z=z\times$（______）　となる。
このとき、（______）【2項　＝　文字 or 数字が2つ】に当てはまるものを求めよ。【算数、数学】

$\boxed{\text{問題❷}}$～お金編～

I)　あるホテルがあります。ビジネスルームは1泊10万円,スイートルームは2泊85万円です。ビジネスルームは$200\mathrm{m}^2$,スイートルームは$1600\mathrm{m}^2$の広さです。$1\mathrm{m}^2$あたりビジネスルームはスイートルームより質が30%下がります。ビジネスルームとスイートルームは経済的にどちらの方がお得でしょうか？

II)　Aさんの父親は、月に170万円の収入があります。Bさんの母親は、年に7000万円の収入があります。Aさんの母親は、Aさんの父親よりいくらか多くの収入があります。Bさんの父親は、働いてはいませんが、年にBさんの母親が稼いだお金の内、2000万円をもらい、B家(母と子供)とは関わらずに独立しています。A家は13人家族,B家は父を含めて12人家族です。A家は1人につき、毎月20万円の食事,家賃は毎月130万円,B家の父以外は1人につき毎月25万円,家賃は毎月115万円です。これらの情報だけから考えて、どちらの家の方が貯金額が高いと考えられますか？

III)　マッサージサービスがあります。Aというサービスは60分までは1分につき2000円かかります。例えば、3分ならば6000円,60分ならば120000円です。ですが、60分を超えると1分ごとに800円増えていきます。例えば、61分だと120800円です。一方、サービスBは、
1分1200円という定額で、時間とともに比例して金額が増えます。時間は1分単位で考えるものとすると、マッサージを始めてから何分以下まではサービスBの方が得で、何分後からAの方が得になるでしょうか？

$\boxed{\text{問題❸}}$～基本問題集～

A) $7+5\times3-\frac{132.5}{\square}\times3\div6\frac{5}{8}\times\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{4}\times9-8\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\div2\right)=21\frac{2}{7}$　□＝？

B) 1, 6, x, 486, 8128…　はある規則にしたがった数列。xを求めよ。

C) $f=3\times m, m=3\times n, n=3\times p$　のとき、$\mathrm{p}=\frac{f}{\square}$。□＝？【ｻｰﾋﾞｽ問題】

D)「継子立て」というものがある。いろいろな種類があるが、カードの継子立てというものがある。カードの継子立ては、1～xまで書かれたx枚のカードを用意し、1 が上に, xが下になるように順番に重ね、「一番上のカードを捨て, 次に出てきたカードを一番下に入れる」という作業を繰り返す。例えば$x=4$であれば *〈図 A〉* のようになり、最終的に 4 が残る。$x=2000$のときの残る数を求めよ。

$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\underset{\text{一回目}}{\rightarrow}\boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\underset{\text{二回目}}{\rightarrow}\boxed{2}\ \boxed{4}\underset{\text{三回目}}{\rightarrow}\boxed{4}$$

〈図 A〉 ※左が上, 右が下にあるイメージ

$\boxed{\text{問題❹}}$～発展問題～八木君が発見した公式だと言う。

素因数分解をする。ここで、22＝2×11→$2^1\times11^1$, 32＝2×2×2×2×2→2^5 のように表すものとする。60 ならば、60＝2×2×3×5→$2^2\times3^1\times5^1$。このとき、「$a^p\times b^q$」と表せる整数を「2 項」と呼ぶこととし、「$a^p\times b^q\times c^r$」と表せる整数を「3 項」と呼ぶこととする(a, b, cは互いに異なる素数, p, q, rは整数)。以下、同様の規則を用いて表記する。例えば、22 は「2 項」, 32 は「1 項」, 60 は「3 項」。そこで、675 という整数について考える。675→$3^3\times5^2$なので「2 項」。「2 項」の整数nの約数の和の求め方は、以下のような公式で求まる。

$$\left【\frac{n-\frac{a^p}{b}-\frac{b^q}{a}+\frac{1}{ab}}{1-\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}}\right】\cdots(*)\qquad(n=a^P\times b^q)$$

675 であれば、n＝675, a＝3, b＝5, p＝3, q＝2。公式にあてはめると、その約数の和は、1240 となる。では、なぜ「2 項」の約数の和の求め方は上記(*)のようになるのか。証明せよ。

$\boxed{\text{問題❺}}$～流水算のような問題～面白いよ！

ある少女がいます。少女はよく船に乗ります。あるとき、少女はいつも通り川を船で上っていました。その船の静水時の速さは分かりませんが、一定です。流速も一定です。上っている途中、少女は桃を見つけました。そのときはスルーしましたが、桃を見つけた 10 分 35 秒後、やはり例の桃が気になり、引き返して川を下っていきました。川の流速は 6 ㎞/h(時速)です。このとき、少女は引き返してから何分後に桃に追いつけましたか？ただし、船を上りから下りに方向を変える時間は考えないものとします。

$\boxed{\text{問題❻}}$～素数の見つけ方～

※YG 教授は素数について研究している。また、以下で「割れる」とは商が整数で、余りが発生しない状態を指す。割ったときの商が 1 になる場合は、「割れない」と言うこととする。

YG 教授は素数の見つけ方を公表した。例えば 100 を 2,3,5,7 のいずれかで割ってみると、2 と 5 で割れる。なので、100≠(素数)。100 はそのようにして素数かどうかを調べる。85 も、2,3,5,7 で割って調べる。すると 5 で割れた。よって、85≠(素数)。3 ならば、2 でも 3 でも 5 でも 7 でも割れないので、素数。だが、これは大きい数になると使えない。そこで YG 教授は、2023 を素数かどうか調べるには、素数「2,3,…$\boxed{f}$」で割り、割れなければ 2023＝(素数),2023≠(素数)だと言った。$\boxed{f}$として最小の整数を答えなさい。また、YG 教授が上のように言った理由も説明しなさい(＝上の方法を証明しなさい)。

$\boxed{\text{問題❶}}$の解答

$(x-y+z)\div z=z$　より、$x-y+z=z\times z$…①
ここで考えたいのは、x－y－z　であるから、①の両辺からzを 2 つ引いて、

$$(x-y+z)-(z+z)=(z\times z)-(z\times 2)$$

つまり、x－y－z＝$z\times(z-2)$
よって、<u>$\boldsymbol{z-2}$</u>…（答）

$\boxed{\text{問題❷}}$ $\boxed{\text{問題❹}}$　の解答は省略させていただきます(ごめんなさい)。来年部誌で解答を載せるつもりです。中学受験算数では出ないはずなので安心してください！(出ないでおくれ…(願望))

$\boxed{\text{問題❸}}$の解答…中学受験で普通に出る基本問題→重要！※B は出来なくても良い。

A) 7＋15－$\frac{132.5}{□}$×3×$\frac{8}{53}$×($\frac{3}{7}$＋$\frac{9}{2}$－4×$\frac{1}{6}$)＝21$\frac{2}{7}$より、
$\frac{\cancel{132.5}^{\,2.5}}{□}$×3×$\frac{8}{\cancel{53}}$×($\frac{3}{7}$＋$\frac{9}{2}$－$\frac{2}{3}$)＝$\frac{5}{7}$→$\frac{60}{□}$×$\frac{179}{42}$＝$\frac{5}{7}$→$\frac{60}{□}$＝$\frac{5}{7}$÷$\frac{179}{42}$＝$\frac{30}{179}$→□＝179×2＝<u>358</u>…(答)
B) 完全数の並び。完全数…自分自身を除いた(正の)約数の和が自分自身になる数。例えば、6 は、1＋2＋3＝6。6 の次は
<u>28</u>…(答)(知らないと中々難しかっただろう)。
C) $f=3\times m$, $m=3\times n$, $n=3\times p$→$m=3\times n$＝$3\times(3\times p)$＝$9\times p$。$f=3\times m$＝$3\times(9\times p)$＝$27\times p$。よって、$p=\frac{f}{□}$は、1＝$\frac{27}{□}$となり、□＝<u>27</u>…(答)
D) $\boxed{\text{下の説明をよく読んだ上で解説を見よ}}$ 44×44＜x＜45×45 より、2000－44×44＝64。64×2＝128。よって、<u>128</u>…(答)が残る。

$\boxed{\text{継子立て}}$
36 枚のカードの継子立てを例に考える。「捨てる→残す」で一セットとする。36÷2＝18…0→18÷2＝9…0。つまり、この時点で 4 の倍数(4, 8, 12, …, 36)が残る(9 枚)。9÷2＝4…1　より、ここで余りが出てしまい、~~4~~ 8 ~~12~~ 16 ~~20~~ 24 ~~28~~ 32 ~~36~~。ここで、最後の数(36)が残っていたが、消えてしまう。そこで、ずっと 2 で割っていって、余りが出ない数(枚数)で継子立てを行うと、最後の数が残るはず…(*)。aをb回かけた数をa^bと表すものとすると、2^n枚(nは 1 以上の整数)で継子立てをすれば、(*)のようになるということ。2^5である、32 枚の場合を考えると、32÷2＝16…0, 16÷2＝8…0, 8÷2＝4…0, 4÷2＝2…0, 2÷2＝1…0。つまり、最後の数 32 が残ること

次ページへgo!

(続き)が確認できた。そこで、m枚で行うとき、カードを減らしていって2^n枚になるときまでを考える。36 枚の場合に戻ると、~~1~~ 2 ~~3~~ 4 ~~5~~ 6 ~~7~~ 8 と、4 枚消えたとき、36－4＝32＝2^5＝2^n枚になる。一セット(捨てて残す)は 2 枚なので、4×2＝8。→8 のカードが残った、という状態が、32 枚ある状態。次に 9 を捨てるときに、32 枚の継子立てが始まると考える。今回は 9, 10, 11…, 36, 2, 4, 6, 8　という 32 枚なので、最後の数は8。よって、36 枚のときは 8 が残る。以上をまとめると、下のようになる。

2^5＜36＜2^6 → 36－32(2^5)＝4 → 4×2＝ 8 …(答)

72 枚の場合、2^6＜36＜2^7 → 72－64(2^6)＝8 → 8×2＝ 16 …(答)

問題❺の解答…長いですが、良いこと書いてあります！

今回は、流水算の、中学受験でまれに出題される「等速上論理」という解法について説明する。考え方自体が極めて難しく、応用の応用である。本問題もこの発展的な解法で、数学等を使わず【編注:僕は使っちゃった…】、易しく解けるのである。よく「等速上論理」と言うと、「分からない」という声があがるので、子供には「電車の中の世界」という考え方で説明する。今回も、電車のこの考え方の解法で説明する。では説明を開始する。早速だが、問をそなたに問いかける。その解(答え)を求めよ。「新幹線に乗った。時速 220 ㎞である。北に向かっている。私は時速 20 ㎞で、速さ一定。南に向かい、走る。走る途中、かばんを電車内に落とし、そのまま 10 秒走ったが、落としたと気づき、すぐに引き返し、先程と同じ速さで $\boxed{\text{A}}$ 秒走って、落とした場所まで行った。$\boxed{\text{A}}$ に当てはまる数を求めよ。※私は、スムーズに動けるとする」という問である。当然答えは 10 である。同じ速さで引き返したのだから、当然行って帰るのにそれぞれ要する時間は等しい。新幹線の時速もいらず、「私」が歩く速ささえいらない。10 秒という条件だけ(＋速さ一定, スムーズに動ける)で解ける。極めて単純。この考え方こそが、真の「等速上論理」の原点なり。「電車の中の世界」では、今回で言う新幹線の速度が流速で、「私」の歩く速さが船の静水時の速さである。極端に言うと、「川に船を出して乗った。流速 220 ㎞である。北に向かっている。船の静水時は時速 20 ㎞で南に向かう。向かう途中、かばんを川に落とし、そのまま 10 秒南に向かったが、落としたと気づき、すぐに北に引き返した。同じ速さで $\boxed{\text{A}}$ 秒向かって、落とした場所まで行った。$\boxed{\text{A}}$ に当てはまる数を求めよ」という問。新幹線の場合と連動させた。こういう場合も同じことなのである。解は 10。こ

れが簡単に説明した、「電車の中の世界」(等速上論理)なのである。川を電車の中と考えたのだ。流速,静水時の速さは全て関係ない。よって、川の流速は関係なく、**10 分 35 秒後**…(答)。
長い解説を読んでくれてありがとうございました。イメージだが、この説明でも十分だと思う。なんせ、難しいポイントだから【編注:名言】。

$\boxed{\text{問題❻}}$の解答…エラトステネスの篩

時間の都合と、答が長くならないために細かくは省きます。申し訳ございません。本問題のテーマは「エラトステネスの篩(ふるい)」と言うものです。ネットで「エラトステネスの篩」と調べれば出てくるのでぜひ検索!(投げやりでごめんなさい)これを皆さんが理解した前提で書きます。
44×44<2023<45×45 より、$\boxed{f}$には、44 以下の最大の素数が入り、答えは$\boxed{f}$=**43**…(答)

以上です。答え載せられなかったり、省略してたりしてるところが多く、申し訳ありません。

【編集者松岡より】
こんにちは。P2 の挨拶でも言ったように、八木君には日々大量の問題が送られてきて、大変です(笑)。でも送ってくれる問題は良問・難問ぞろい。こちらも頭を抱えてしまいます。学びになります。ここに載せた以上に沢山の問題を送ってもらいましたが、時間と、解答作成と、枚数の関係で、ごく一部しか載せていません。来年の部誌ではそんな問題も混ぜていきたいと思います。八木君、作問よろしくお願いします!

個人作問編②

中 2（23R）松岡　柚翔

作問しました‼　すべて自作です。

難易度の目安が問題❺の後に**書いてある**。ぜひ挑戦してみてください！

問題❶

A,B,C さんの 3 人がお金のやり取りをします。その時の操作は下の通りです。(所持金　A さん：x円,B さん：y円,C さん：z円)

【操作】
まず初めに A さんの所持金の$\frac{1}{3}$を B さんに渡す。その後、B さんの所持金の$\frac{1}{3}$を C さんに渡す。最後に C さんの所持金の$\frac{1}{3}$を A さんに渡す。

しかし、上記の操作を終えたあとお母さんにお金を 3：2：4 の割合でもらったため、3 人の所持金がそれぞれy円になり、3 人の所持金の合計が 7200 円になりました。x,y,z にあてはまる数をそれぞれ答えよ。ただし、同じ文字には同じ数が入ります。

問題❷

算子さんと数字くんが以下のルールでゲームを行う。

【ルール】
2 人がじゃんけんをし、**勝ったら「2」**, **負けたら「1」**, **あいこだったら「0」**を書く。ただし、**必ず初めはあいこにならない**ように調整する。このときに左から詰めて並べた数字を 1 つの数とする。以下の文章や問題文では、勝ち＝○, 負け＝×, あいこ＝△　と表記する。

例えば算子さんが(○, ○, △, ×), 数字くんが(×, ×, △, ○)となったとき、数は算子さんが 2201, 数字くんが 1102 となり、2 人の数の差は 2201－1102＝1099。1099 を素因数分解すると $\boxed{\quad *1 \quad}$ となるので、約数の個数は $\boxed{\quad *2 \quad}$ 個である。次の各問に答えよ。※約数の個数の求め方は、P9～のコラムを参照してください。

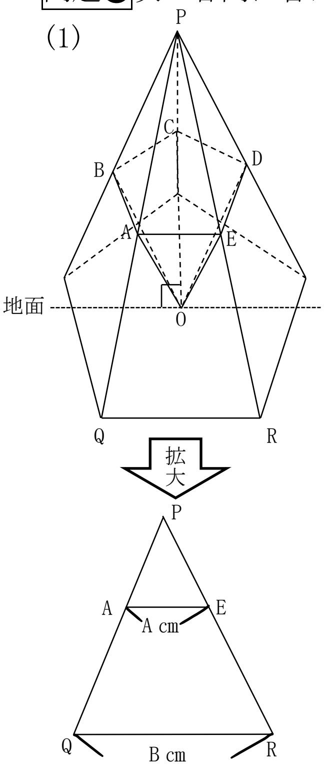
(1) $\boxed{\quad *1 \quad}$ と $\boxed{\quad *2 \quad}$ にあてはまる式や数を求めよ。
$\boxed{\quad *1 \quad}$ において、1099 が素数の場合、「1099」と答えよ。

(2) 算子さんが(○, △, ○, ×, ×, ○), 数字くんが(×, △, ×, ○, ○, ×)となったとき、2 人の数の差をとる(0 より大きくなるようにする)。その数を素因数分解し、また、その数の約数の個数を求めよ。素因数分解で、数x が素数の場合、単に「x」と答えよ。

(3) 算子さんと数字くんが 3 回じゃんけんをした。このとき、2 人の数の差(0 より大きくなるようにする)の約数の個数が 9 個になった。このようになる手の出し方 2 通りを○, ×, △を用いて答えよ。

問題❸次の各問に答えよ。

(1)



↱全体の

左図のような正五角すいの底面と平行な面を書きいれ、底面の正五角形の点とを結ぶと、(全体の正五角すいの体積)：(新たにできた正五角すい O—ABCDE の体積)＝3375：392　となった。斜線をつけた正五角形 ABCDE の一辺を A cm, 全体の正五角すいの底面の正五角形の一辺を B cmとすると、A と B はともに互いに素な整数でした。A と B にあてはまる数を答えよ。

【答えは１通りだけです！**】**

↱a, b, cの順

(2) $a\times a+b\times b=c\times c$となる数の組は、3：4：5や5：12：13などがあるが、その他にどんな数の組があるか。4 つの例を答えよ。C×C－D×D＝(C＋D)×(C－D)となることを使ってよい。(3 つの数がすべて互いに素な整数である比を答えること。例えば 6：8：10 は NG。本問題中に出てきた、3：4：5 ， 5：12：13　は除く。)

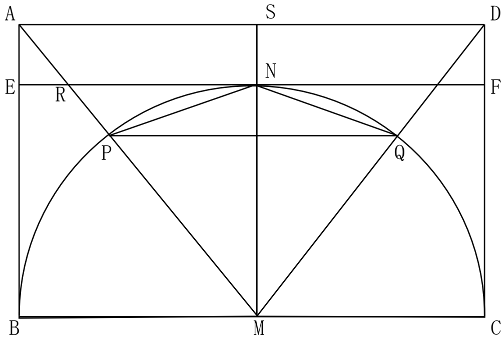
問題❹

ある数x　について、x以下の最大の整数を*整数部分*, xから整数部分を引いた部分を*小数部分*という。（例: $\frac{22}{7}$の整数部分 3,小数部分$\frac{1}{7}$）

a, b をともに素数とする。また、a, b は互いに素[※]で、aとbは異なる数である。（つまり、$a \neq b$）　※互いに素…公約数が 1 のみ
ここで、$a \div b$ について考える（余りは出さず、分数で求める）。
「$a \div b$」の小数部分を 4 倍すると b になる。1～100 までの整数の中に、**aとbの組はいくつあるか**求めよ。その理由も考えよ。
【必要ならば、**1～100 までの整数の中に素数が 25 個**あることを利用せよ】

問題❺

(下図と、その説明を見て問に答えよ)



[説明]長方形ABCDの、BCの中点を点Mとする。ここで、Mを中心に、半径BMの半円を図のように描いた。また、弧BCの中点をNとし、Nを通り,BCに平行な直線を引く。その直線とAB,DCとの交点をそれぞれ点E,Fとする。EFとAMの交点を点Rとする。次にAとM,DとMをそれぞれ結び、半円との交点をそれぞれP,Qとする。最後に、MNとADの交点を点Sとする。

問. AB：BC＝2：3のとき、**四角形ARNSと三角形NPQの面積比**を求めよ。

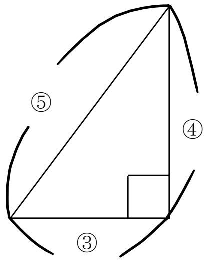
(注)必要ならば、以下の事実を用いてもよい。

①三角形が合同になる条件

i) 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい(二辺夾角相等)
ii) 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい(二角夾辺相等)
iii) 3組の辺がそれぞれ等しい(三辺相等)

の**いずれか1つが**成り立てば、2つの三角形は合同である。

②



直角三角形で、直角をはさむ二辺の長さの比が3：4のとき、その三角形の三辺の長さの比は、左図のように、3：4：5である。

目安:問題❶は問題文の意味が分かる方はぜひ！応用問題。

問題❷は約数, 素因数分解について分かる方なら、十分解けます！

問題❸は応用問題。相似比・体積比が分かる方はぜひ！

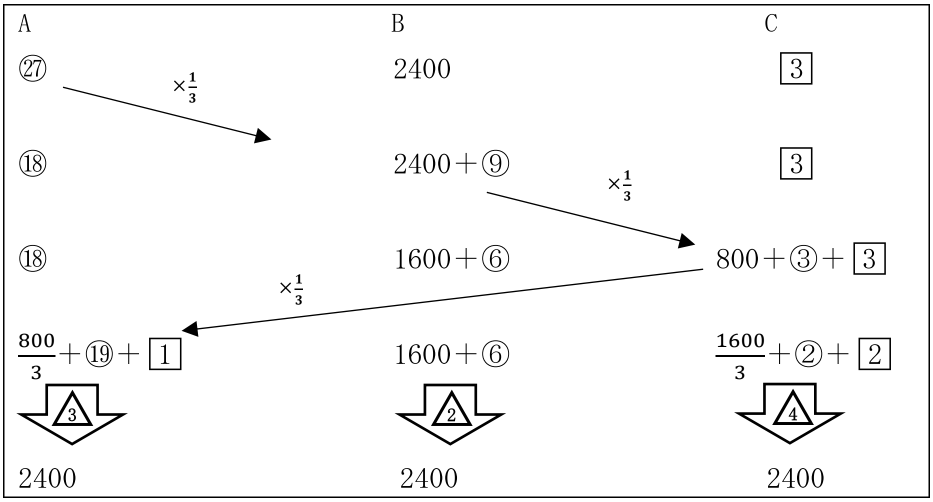
問題❹は問題文の意味が分かる方なら、十分解けます！

問題❺は現小 5 生～　が目安。ですが、現小 4 生でも、解けそう、という方はぜひ挑戦してみてください！

〈解答〉

問題❶　問題文から、最終的に 3 人の所持金がそれぞれy円になり、3 人の所持金の合計が 7200 円になったことが分かる。つまり、

3×y＝7200。よって、$\boldsymbol{y=2400}$。次に、お金の動きを整理していく。



〈図 1〉

※ⓐは①を基準にして、a 倍、ということ。例えば㉗は①の 27 倍。

↳□, △に関しても同様の考え方をしてください。

最初の A さんの所持金を㉗としたのは、

$\frac{1}{3}$のやり取りを 3 回行う→A さんの所持金の、$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$倍を最後 C さんが A さんに渡す

→最初の A さんの所持金を㉗とすれば小数・分数が出にくい‼　から。

*〈図 1〉*の下 2 行に注目。すると、下のような式が出てくる。

A さんに関して…($\frac{800}{3}$＋⑲＋$\boxed{1}$)＋△3＝2400

↳**⑲＋$\boxed{1}$＋△3＝$\frac{6400}{3}$**　…(a)

B さんに関して…(1600＋⑥)＋△2＝2400

↳⑥＋△2＝800

↳**③＋△1＝400**　…(b)

C さんに関して…($\frac{1600}{3}$＋②＋$\boxed{2}$)＋△4＝2400

↳②＋$\boxed{2}$＋△4＝$\frac{5600}{3}$

↳**①＋$\boxed{1}$＋△2＝$\frac{2800}{3}$**　…(c)

(a)－(c)＝⑱＋△1＝$\frac{3600}{3}$→**⑱＋△1＝1200**　…(d)

(d)－(b)＝⑮＝800→**①＝$\frac{160}{3}$**

①＝$\frac{160}{3}$より、③＝160。これと(b)より、160＋ 1 ＝400→ 1 ＝240

これと①＝$\frac{160}{3}$と(c)より、$\frac{160}{3}$＋ $\boxed{1}$ ＋480＝$\frac{2800}{3}$→ $\boxed{1}$ ＝$\frac{1200}{3}$。

以上より、x＝㉗＝$\frac{160}{3}\times 27$＝1440, z＝ $\boxed{3}$ ＝$\frac{1200}{3}\times 3$＝1200。よって、

答え　x＝1440, y＝2400, z＝1200

$\boxed{\text{問題❷}}$　解説を読むうえで、約数の個数の求め方を知らない人は **P9～のコラムで確認**しましょう‼

(1)素数　2, 3, 5, 7, 11…と割っていく。すると、1099＝7×157 と分かる。

157 は素数※なので、これで OK。※157 が素数であることは、P 参照

よって、約数は、(1＋1)×(1＋1)＝4(個)。よって、

答え　＊1＝　1099＝7×157,　＊2＝　4 個

(2)ルールにしたがってそれぞれの数を求めると、
算子さん:202112, 数字くん:101221。差(＞0)は、202112－101221＝100891。(1)と同様に割っていく。すると、100891＝7×14413
＝7×7×2059＝7×7×29×71 と分かる。素因数の積に表せたのでこれで OK。7×7×29×71＝7^2×29×71 より、約数は、
(2＋1)×(1＋1)×(1＋1)＝12(個)。よって、

答え　100891　で、　12 個

(3)3 回じゃんけん→2 人の数はともに 3 桁。よって、数の差(＞0)は、(3 桁)－(3 桁)だから、1 桁/2 桁/3 桁　の 3 通り。ここで、1 桁の数は 0～9 がある。みなさん、いいですか？　9 の約数の個数は 3 個ですが、今みなさんはそのことを求められないとします。このとき、9 の約数(＞0)は、は最大で何個？と言われたら 9 個ですよね。だって、1～9 までの整数すべてが 9 の約数であれば 9 個になりますから。みなさん、もうお気づきですね？(え?)1 桁の数の約数の個数で最大は 9 個っぽい

けど、それは嘘で、3 個しかない→よって、1 桁の整数の約数の個数が 9 個以上になることは絶対——にない‼よって、**1 桁については無視**しましょう。次に 2 桁。(P8 を見ましょう)9 を 2 整数の積で表すと、
1×9 or 3×3 ですから、数＝$\boldsymbol{x^8}$ or $\boldsymbol{y^2 \times z^2}$($x, y, z$は素数。$y$と$z$は異なる値。)で表せれば OK(1×9 において、■＋1＝1 となるとき、■＝0 で、P8 から、どんな数も 2 乗すれば 1 になると分かる。1×▲は結局▲に等しいから“1×9”パターンは、x^8(xは素数)の形です)。
ここで、3 桁について考えてみる。9 を 3 整数の積で表すと、
1×1×9 or 1×3×3 になる。これは**結局 2 桁の時と同じ**なので、
2, 3 桁に関しては同時に調べる。(**「差」について考えます**)
i)まず<u>x^8 について(xは素数)</u>
$2^8 = 256, 3^8 = 6561$より、256 のみが適する。
ii) <u>$y^2 \times z^2$(y, zは異なる素数)</u>
どちらも 2 乗なので、y＜z として考えても問題ない。
($y^2 \times z^2$＝$z^2 \times y^2$だから、順番は関係ない)(分かる人向け:一般性を失わないですね)
([y,z]→(その数)というように打っています)
[2, 3]→(36)／[2, 5]→(100)／[2, 7]→(196)／[2, 11]→(484)／
[2, 13]→(676)／[2, 17]→(1156…4 桁で不適)
…と一回ここで STOP‼ このゲームのルールから、できる最大の 3 桁の数は 222。最小の数は 100。よって、差(＞0)は最大で、222－100＝122。
よって、122 までの数を考えられれば OK‼ …簡単になったね‼
[3, 5]→(225) →もうアウトです
y＜z としているから、これより先は 225 より大きい、つまり全部不適。よって、考えられる差(＞0)は 36, 100~~, 196, 484, 676~~ です。少なくなりましたね～。でも、実はさらに 100 のみ に絞れる‼ なぜだ？
このじゃんけんのルールから、数の一の位は 0, 1, 2 のいずれか。
0－0, 0－1, 0－2, 1－0, 1－1, 1－2, 2－0, 2－1, 2－2 を考えると順に、

0, 9, 8, 1, 0, 9, 2, 1, 0　となる(一の位について考えているので、例えば 0－1 なら、10－1 などを考えて 9 となる)。よって、本問で取りうる一の位は 0, 1, 2, 9, 8　であり、36 はありえない。よって、**差は 100 のみ**(一の位が 0 だから正しい)。では、差 100 について考えていく。その組み合わせは、例えば(101―201)などがあるが、これは不適。なぜ？じゃんけんは、(勝つ一負ける), (あいこ一あいこ)の 2 パターンしかない(順番問わない)。勝つ:2, 負ける:1, あいこ:0 だから、**各位について、(2―1), (0―0)　という組み合わせ**が成り立っている必要がある(順番問わない)。それを理解したうえで、差 100 を考える。一の位・十の位は同じで、百の位の数の差が 1 であれば OK。位の数が同じで、それが 2 or 1　の場合、組み合わせとして不適。数が同じの場合、0 である(あいこ)必要がある。つまり、十の位・一の位がともに 0 で、百の位が 2 と 1 である必要がある。よって、200 と 100 ならば OK‼
(算子, 数字)＝(200、100), (100, 200)であるそれぞれの場合を考えて、
答え　(算子, 数字)＝(○, △, △), (×, △, △)／(×, △, △), (○, △, △)

…とここまで長―――――い解説を読んでくれた方、ありがとうございます。簡潔にまとめたかったところですが、厳密性を考えると…沢山かいてしまいました。

$\boxed{\text{問題❸}}$

(1)(全体体積)：(O―ABCDE 体積)の順番で議論を進める。底面積比は B×B：A×A。高さの比は、B：(B－A)。以下は、三角形と相似比の関係が分かっていれば分かる。体積比は(底面積比)×(高さ比)で求まる。つまり、(全体体積)：(O―ABCDE 体積)＝B×B×B：A×A×(B－A)＝3375：392。「比」であるが、普通に体積が 3375cm^3と 392 cm^3であるとみなして考える。同じ数 B を 3 回かけて 3375→B＝15。
A×A×(15－A)＝392 で、A を整数として調べると、A＝7※。A と B は互いに素だから、**答え　A＝7, B＝15**

※$\boxed{\text{数学}}$　A^2(15－A)＝392 を因数分解→$-\{(A-7)(A^2-8A-56)\}=0$
因数定理より。
(2)**例**を 4 つ考えればよい問題。こういう問題では、具体例をいくつか見つけ、規則性を考えると良い。$\boxed{\text{誘導}}$C×C－D×D＝(C＋D)×(C－D)をどう使うか考える。3：4：5 ならば$3\times3+4\times4=5\times5$が成り立っている。ここで、5×5－4×4 は、$\boxed{\text{誘導}}$より、(5＋4)×(5－4)＝9。実際、3×3 に等しい。これを踏まえて考えていく。ここで、火の中のつの数字を 4 として、残り 2 つの数を求める。$\boxed{4:x:y(\boldsymbol{x<y})}$とすると、
4×4＋x×x＝y×y　すると、y×y－x×x＝(y＋x)×(y－x)＝4×4
x,yは整数で、x＜yだから、y＋x, y－x はともに 0 より大きい整数。
x,yは整数だから、(y＋x)＞(y－x)。(y＋x), (y－x)の組を探す。
(y＋x)×(y－x)＝16
(y＋x, y－x)＝(16, 1), (8, 2)→(x, y)＝(7. 5, 8. 5), (3, 5)
$\boxed{\text{求め方}}$(y＋x)＋(y－x)＝2×y　となる。ここからyの値が分かる。また、そのyの値と、(y＋x, y－x)が分かっていることから、xも分かる。

x＜y より、(x, y)＝(7. 5, 8. 5)　が適する。しかし、x,yが整数でない…。比は最も簡単な整数比で答えるべき。ここで、(x, y)＝(7. 5, 8. 5)　を 2 倍して(x, y)＝(15, 17)。→比を何倍かするならば、全体の数字を 2 倍する必要あり。4×2＝8 だから、**8：15：17**。当初の「x,yが整数である」設定が変に見えるが、結果的に整数になったので OK。
同様にして考えていく($\boxed{\text{例}}$をあげるが、組み合わせは実際無限にある)。
$\boxed{6:x:y(\boldsymbol{x<y})}$
→(y＋x)×(y－x)＝36→(y＋x, y－x)＝(36, 1), (18, 2), (12, 3), (9, 4)
→(x, y)＝(17. 5, 18. 5), (8, 10), (4. 5, 7. 5), (2. 5, 6. 5)
→**12：35：37**~~, 6：8：10, 12：9：15, 12：5：13~~【→3：4：5,
5：12：13】

$\boxed{7:x:y(\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y})}$

$\to(y+x)\times(y-x)=49\to(y+x,y-x)=(49,1)\to(x,\ y)=(24,25)$

→7：24：25

$\boxed{9:x:y(\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y})}$

$\to(y+x)\times(y-x)=81\to(y+x,y-x)=(81,1),(27,3)$

$\to(x,\ y)=(40,41),(12,15)$

→9：40：41~~, 9：12：15~~【→3：4：5】

$\boxed{10:x:y(\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y})}$

$\to(y+x)\times(y-x)=100\to(y+x,y-x)=(100,1),(50,2),(25,4),(20,5)$

$\to(x,\ y)=(49.5,50.5),(24,26),(10.5,14.5),(7.5,12.5)$

→20：99：101~~, 10：24：26~~**, 20：21：29**~~, 20：15：25~~

【→5：12：13, 3：4：5】

$\boxed{11:x:y(\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y})}$

$\to(y+x)\times(y-x)=121\to(y+x,y-x)=(121,1)\to(x,\ y)=(60,61)$

→11：60：61

…勿論これだけではない。無限にあるのでぜひ考えてみてください！

答え$\boxed{\text{例}}$　**7：24：25, 8：15：17, 9：40：41, 11：60：61**

※勿論、「例」ですから、正しければ正解！

$\boxed{\text{問題❹}}$

$a\div b$ の整数部分をc ,小数部分をd とおく。問題文より、

$$\begin{cases} a\div b=c+d & \dots① \\ b=4d & \dots② \end{cases}$$

a,bは素数であることから自然数である。②と、bが自然数であることと、$0\leqq d<1$　より、(小数部分は 1 を超えない)

$d=0.25,\ 0.5,\ 0.75$($b=4d$と、bが自然数→$d=\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}$)

それぞれに対応するbの値は、②と合わせて、

b＝0, 1, 2, 3

$$\begin{cases} b=0\text{ のとき、}a \div 0\text{ を考えるが、0 で割ることは考えないので、}\boldsymbol{NG} \\ b=1\text{ のとき、}b\text{は素数で、問題と矛盾するので、}\boldsymbol{NG} \\ b=2\text{ のとき、}b\text{は素数で、互いに素な任意の数を 2 で割ったときの小数部分は 0.5 になる}^{※}\text{から、}\boldsymbol{OK} \\ b=3\text{ のとき、}b\text{は素数だが、互いに素な任意の数を 3 で割っても小数部分は 0.75 にはなりえないので、}\boldsymbol{NG} \end{cases}$$

※問題文より、aは素数で、2 以外の素数はすべて奇数だから、

(2 以外の素数)÷2　は、割り切れず、小数部分 0.5 が生じる。

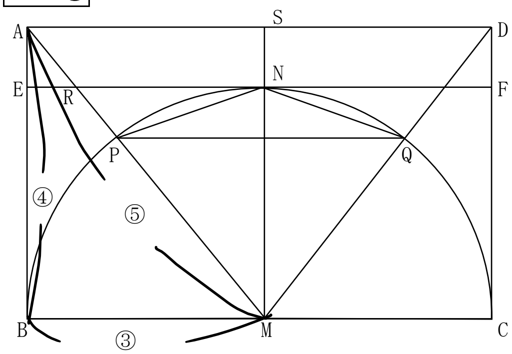
以上より、問題に適するbの値は、b＝2 のみである。

よって、b＝2 を満たしているならば、aは任意の素数でよい。(∵aはbと互いに素であれば任意の素数でよく、2 以外の素数はすべて奇数だから)

問題文より、1～100 に、素数は 25 個あり、aはbと互いに素で、$a \neq 2$である任意の素数だから、

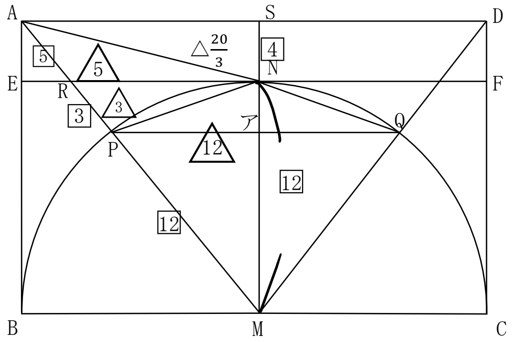
25－1＝**答え　24(個)**

問題❺



AB：BC＝2：3 で、M は BC の中点→AB：BM＝4：3。角 B は直角→AB：BM：AM＝4：3：5(問題の、「②」参照)。それぞれ④,③,⑤とおく。半円の半径等しい→PM＝③。AP＝⑤－③＝②で、**AP：PM＝2：3**。また、半径だから、MN＝③　も分かる。SM＝④(四角形 ABMS は長方形)だから、NS＝④－③＝①。よって、**MN：NS＝3：1**。△ASM と△RNM は相似。よって、**MR：RA**＝MN：NS**＝3：1**。すると…。

上図より、**AR：RP：PM＝5：3：12**。
次に面積について考える。下図で、長さ(比)は□,面積(比)は△
(都合上、分数・小数の場合は記号の後に数、となっている)。



〈図 2〉

PQ と NM の交点をア　とする。合同となる条件(問題文の「①」参照)から、△ASM と△DSM は合同→角 AMS＝角 DSM→つまり、角 PMア＝角 QMア。PM＝QM＝(半径)で、共通しているから、M ア＝M ア。よって、2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい(二辺夾角相等)から、△PM アと△QM ア　は合同。すると、角 P ア M＝**90°**で、P アは、RN と平行→△PMアと△RMN は相似。よって、

Mア：アN＝MP：PR**＝4：1**。△P ア N＝△12 ×$\frac{1}{4+1}$＝△2.4。△PMアと△QMア が合同だから、P ア＝Q ア。よって、△PNアと△QNアの面積は等しい。よって、△PNQ＝△PN ア＋△QN ア＝△2.4×2＝△4.8。また *〈図 2〉* より、台形 ARNS の面積は △5 ＋△$\frac{20}{3}$＝△$\frac{35}{3}$。よって、求める比は、△$\frac{35}{3}$：△4.8＝

答え　175：72

ここまで読んでくれた方、ありがとうございました。

編集後記

中２（23R）松岡　柚翔

いかかでしたでしょうか。ことしから数研で「部誌」を作りましたが、算数・数学が大好き(多分)な部員たちの努力の結晶。かなり良いものが出来たのではないでしょうか。部誌制作の研究時間がとれませんでしたが、来年からは余裕を持ち、深い研究を皆さんに届けていきたいと思います。受験に役立つ知識についても書き続ける予定です。
これを読んで数研に入りたいと思った人たちはぜひ入ってください！(現高１以下)
論文中に間違い等があったことがあるかもしれませんが(打ち忘れもあるかも？)、気にせず読み進めていただければ幸いです。今後の発展に生かしていきますので、ぜひ楽しみにしていてください。八木君の問題❷ 問題❹　の解答は来年部誌に載せていただきます。しかし、数研が今年きりで廃部してしまっては来年解答を届けることすらできません。皆さん、数研に入りましょう‼…勧誘はさておき。
「こんなことやってほしい」ということがあればぜひ教えてください。ではまた来年お会いしましょう！
入試予想問題も制作時間すごくかけたので結構よい仕上がりではないかと。これを解いて、受験に合格しましょう！
受験勉強頑張ってください‼